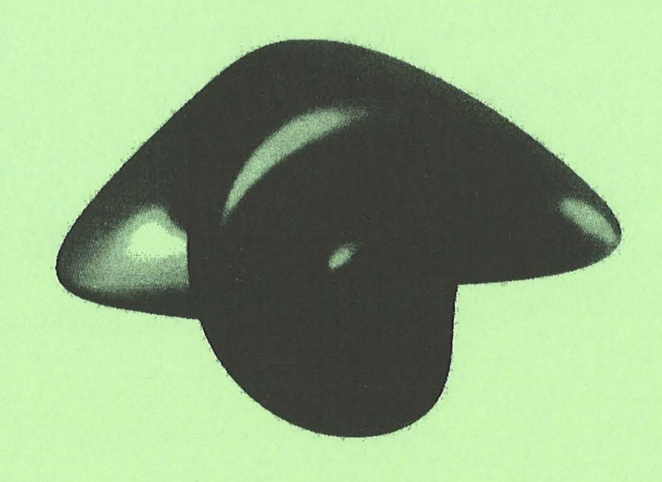
GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

SUPERFICIES

por

M. EUGENIA ROSADO MARÍA



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-80-06

GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

SUPERFICIES

por

M. EUGENIA ROSADO MARÍA

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-80-06

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

Geometría diferencial de curvas y superficies.
Superficies

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 315.01 / 3-80-06
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-347-2
ISBN-13: 978-84-9728-349-6
Depósito Legal: M-16935-2011

Esta serie con título: "Geometría diferencial de curvas y superficies" formada por dos cuadernillos:

- Curvas
- Superficies

recoge el estudio desde el punto de vista diferencial de las curvas y superficies. Estos cuadernillos pretenden ser un complemento teórico y práctico a la docencia desarrollada en el aula en la materia del estudio diferencial de las curvas y superficies.

La estructura de ambos cuadernillos es homogénea. En cada tema se desarrolla la teoría incluyendo las demostraciones de los resultados que se han considerado más relevantes así como ejemplos que pretenden ilustrar los conceptos presentados en la teoría. En cualquier caso, la exposición teórica de los resultados no pretende ser más que un guión que puede seguir el profesor, decidiendo por sí mismo cómo presentar los resultados y qué demostraciones realizar en el aula. Tanto los conceptos, resultados y demostraciones presentados se pueden encontrar en cualquier texto convencional de la materia, ya que dichos resultados son clásicos.

Me gustaría mostrar mi agradecimiento a los profesores y alumnos que me han hecho llegar sugerencias y que han detectado erratas en las versiones preliminares de dichos cuadernillos así como las que me puedan hacer llegar en el futuro. En particular me gustaría agradecer al profesor Pedro Galán la ingrata tarea de detectar erratas y tanto a él como al profesor Francisco Padial la ayuda que me han prestado a la hora de incluir gráficas en ambos cuadernillos. Finalmente me gustaría agradecer a Almudena Gil, becaria de la edición de los cuadernillos del Instituto Juan de Herrera, su trabajo a la hora de publicar dichos cuadernillos.

Superficies

M. Eugenia Rosado María
Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Técnica Superior de Arquitectura, UPM
Avda. Juan de Herrera 4, 28040-Madrid, Spain
E-mail: eugenia.rosado@upm.es

Índice

1 Representación analítica de superficies

Definición. Se dice que un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una *superficie parametrizada* si existe un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ y una aplicación

$$\begin{aligned} \vec{r}\colon D &\subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{r}(u,v) &= (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \end{aligned}$$

tal que $\operatorname{Im}\vec{r} = S$.

A la aplicación $\vec{r}$ la denominamos *representación paramétrica de S.*

Definición. Se dice que un punto $P \in S$ con $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(u,v)$, es un *punto regular* para la parametrización $\vec{r}$ si se verifica: $\vec{r}_u(u,v) \wedge \vec{r}_v(u,v) \neq \vec{0}$ para todo $(u,v) \in D$, siendo

$$\begin{aligned} \vec{r}_u(u,v) &= (x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v)), \\ \vec{r}_v(u,v) &= (x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v)). \end{aligned}$$

La notación que utilizamos es: $x_u(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)$.

La condición $\vec{r}_u(u,v) \wedge \vec{r}_v(u,v) \neq \vec{0}$ significa que los vectores $\vec{r}_u(u,v)$, $\vec{r}_v(u,v)$ son linealmente independientes; esto es,

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_u(u,v) & y_u(u,v) & z_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) & z_v(u,v) \end{pmatrix} = 2.$$

Si tenemos una aplicación diferenciable,

$$\begin{aligned} \vec{r}\colon D &\subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{r}(u,v) &= (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \end{aligned}$$

con $\operatorname{Im}\vec{r} = S \subset \mathbb{R}^3$ diremos que un punto $P \in S$ con $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(u_0, v_0)$, es un *punto singular* de S si $\vec{r}_u(u_0, v_0) \wedge \vec{r}_v(u_0, v_0) = \vec{0}$.

Los puntos singulares pueden aparecer por la naturaleza de la superficie o por la elección de la parametrización.

Ejemplo 1 Consideramos la semiesfera superior de radio r y centrada en el origen; esto es, la semiesfera de ecuación cartesiana:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \text{ con } z \geq 0.$$

Consideramos la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} \vec{r}\colon [0, 2\pi) \times (0, \pi/2) &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{r}(\alpha, \beta) &= (a\cos\alpha\sin\beta,\ a\sin\alpha\sin\beta,\ a\cos\beta)\,, \end{aligned}$$

donde α mide la longitud y β la latitud. Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) &= (-a\sin\alpha\sin\beta,\ a\cos\alpha\sin\beta,\ 0)\,, \\ \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) &= (a\cos\alpha\cos\beta,\ a\sin\alpha\cos\beta,\ -a\sin\beta)\,, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \wedge \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) &= \left(-a^2\cos\alpha\sin^2\beta,\ -a^2\sin\alpha\sin^2\beta,\ -a^2\sin\beta\cos\beta\right) \\ &= -a^2\sin\beta\,(\cos\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha\sin\beta,\ \cos\beta)\,. \end{aligned}$$

Por tanto, $\vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \wedge \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) = \vec{0}$ si y sólo si $\sin\beta = 0$; esto es, si y sólo si $\beta = 0$. Luego, la parametrización que tenemos es regular.

Ejemplo 2 Consideramos el semicono circular de ecuación cartesiana:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \text{ con } z \geq 0.$$

Podemos considerar la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} \vec{r}\colon [0, 2\pi) \times [0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{r}(\alpha, t) &= (t\cos\alpha,\ t\sin\alpha,\ t)\,. \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{r}_\alpha(\alpha, t) &= (-t\sin\alpha,\ t\cos\alpha,\ 0)\,, \\ \vec{r}_t(\alpha, t) &= (\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 1)\,, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\vec{r}_\alpha(\alpha,t)\wedge\vec{r}_t(\alpha,t) &= \left(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha,\ -t\sin^2\alpha - t\cos^2\alpha\right)\\ &= \left(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha,\ -t\right).\end{aligned}$$

Por tanto, $\vec{r}_\alpha(\alpha,t)\wedge\vec{r}_t(\alpha,t)=\vec{0}$ si y sólo si $t=0$. En el punto $P=(0,0,0)$ es un punto singular y no podemos definir el plano tangente al cono en dicho punto. Nótese también que el punto P es un punto múltiple para dicha parametrización ya que:

$$\vec{r}(\alpha,0)=\overrightarrow{OP},\ \forall\alpha\in[0,2\pi).$$

Ejemplo 3 *Superficie de revolución.* Consideramos la supeficie generada al girar alrededor del eje OZ la curva de ecuación $z=f(x)$, donde f es una función continua con derivadas continuas de todo orden, contenida en el plano $y=0$.

Primero parametrizamos la curva que tenemos. En este caso una parametrización de la curva con ecuación $z=f(x)$ es: $\vec{s}(u)=(u,0,f(u))$, con $u\in\mathbb{R}$. La matriz del giro de ángulo α alrededor del eje OZ es:

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Al girar la curva dada alrededor del eje OZ obtenemos:

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ 0\\ f(u)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\cos\alpha\\ u\sin\alpha\\ f(u)\end{pmatrix},\ \text{con}\ \alpha\in[0,2\pi).$$

Por tanto, una representación paramétrica de dicha superficie viene dada por:

$$\begin{aligned}\vec{r}\colon (0,+\infty)\times[0,2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3,\\ \vec{r}(u,\alpha) &= \left(u\cos\alpha,\ u\sin\alpha,\ f(u)\right).\end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{r}_u(u,\alpha) &= \left(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ f'(u)\right),\\ \vec{r}_\alpha(u,\alpha) &= \left(-u\sin\alpha,\ u\cos\alpha,\ 0\right).\end{aligned}$$

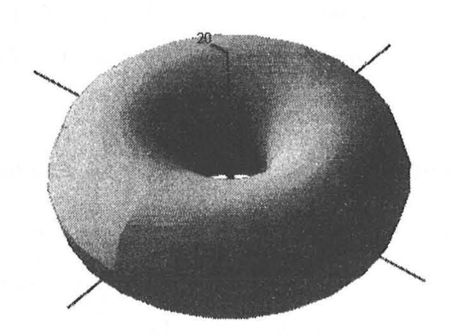
Por tanto,

$$\vec{r}_u(u,\alpha) \wedge \vec{r}_\alpha(u,\alpha) = (-uf'(u)\cos\alpha,\ uf'(u)\sin\alpha,\ u) \neq \vec{0}$$

pues $u \neq 0$. Luego el punto P con coordenadas $(0,\ 0,\ f(0))$ es un punto singular. Nótese que el punto P es un punto múltiple para dicha parametrización ya que:

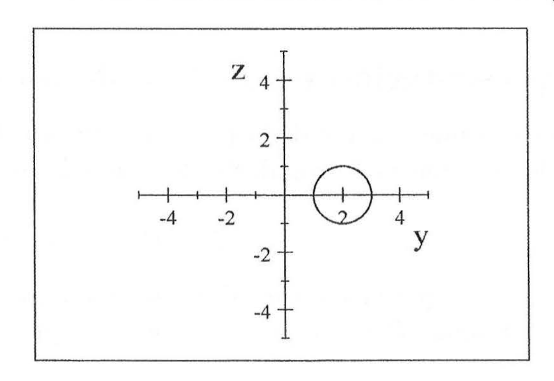
$$\vec{r}(u,\alpha) = (0,\ 0,\ f(0)) \text{ para todo } \alpha \in [0, 2\pi).$$

Ejemplo 4 *Toro.* Superficie generada al girar alrededor del eje OZ una circunferencia de centro $(0,b,0)$ y radio a con $a < b$. Véase la siguiente figura:



Toro

Por ejemplo, consideremos la circunferencia de centro $C = (0,2,0)$ y radio 1.



Parametrizamos primero dicha circunferencia. Un punto de la circunferencia es de la forma: $(0, 2+\cos\alpha, \sin\alpha)$ con $\alpha \in [0, 2\pi)$. Al girarlo alrededor del eje OZ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2+\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\beta\,(\cos\alpha+2) \\ \cos\beta\,(\cos\alpha+2) \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

con $\beta \in [0, 2\pi)$. Hemos obtenido la siguiente parametrización del toro:

$$\begin{aligned} \vec{r}\colon [0,2\pi) \times [0,2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{r}(\alpha,\beta) &= (-\sin\beta\,(\cos\alpha+2)\,,\ \cos\beta\,(\cos\alpha+2)\,,\ \sin\alpha)\,. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} x(\alpha,\beta) &= -\sin\beta\,(\cos\alpha+2)\,, \\ y(\alpha,\beta) &= \cos\beta\,(\cos\alpha+2)\,, \\ z(\alpha,\beta) &= \sin\alpha. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta: $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (\cos\alpha+2)^2 = \cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 4 \\ &= 1-\sin^2\alpha + 4\sqrt{1-\sin^2\alpha} + 4 \\ &= 5 - z^2 + 4\sqrt{1-z^2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left(x^2+y^2+z^2-5\right)^2 = 16\left(1-z^2\right)$$

es la ecuación implícita del toro.

1.1 Representación explícita o de Monge

Una superficie S puede venir dada por una ecuación $F(x,y,z)=0$ donde F es una función diferenciable con derivadas parciales continuas de todo orden; esto es,

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z)=0\right\}.$$

Si $F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ por el Teorema de la función implícita sabemos que existe un entorno del punto $P=(x_0,y_0,z_0)$ de manera que en ese entorno podemos

ver la superficie como la gráfica de una función $f(x,y)$, con $(x,y) \in D$. Esto es, tenemos una representación paramétrica de la superficie de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{r}: D & \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{r}(x,y) & = (x,y,f(x,y)) . \end{aligned}$$

Dicha representación, en la que los parámetros son precisamenta las coordenadas cartesianas, se denomina *carta de Monge* o *representación explícita de S*.

2 Estudio local de una superficie

Sea una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ con representación paramétrica regular

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \text{ con } (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,$$

de clase mayor o igual a 3 y sea $P \in S$ con $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(u,v)$.

2.1 Plano tangente y recta normal en un punto de una superficie.

Definición. Decimos que un vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ es *tangente a la superficie S* en P si es tangente en P a una curva contenida en S.

Sea C una curva contenida en la superficie; $C \subset S$. Por tanto, una representación paramétrica de C es:

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)),\ y(u(t), v(t)),\ z(u(t), v(t))) .$$

Utilizando la regla de la cadena obtenemos:

$$\vec{\gamma}\,'(t) = \vec{r}_u(u(t), v(t))u'(t) + \vec{r}_v(u(t), v(t))v'(t).$$

Por tanto, cualquier vector tangente a la superficie S se escribe como combinación lineal de los vectores $\vec{r}_u(u,v)$, $\vec{r}_v(u,v)$.

NOTA: Si el punto P es regular los vectores $\vec{r}_u(u,v)$, $\vec{r}_v(u,v)$ son linealmente independientes y forman una base del plano tangente a S en P.

Fijados los parámetros $v = v_0$ (resp. $u = u_0$), a las curvas con parametrizaciones

$$\begin{aligned} \vec{r}(u, v_0) &= (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)), \ u \in I, \\ (\text{resp. } \vec{r}(u_0, v) &= (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)), \ v \in J), \end{aligned}$$

las denominamos *curvas paramétricas o coordenadas.*

Definición. El *plano tangente* a S en P es el plano que contiene a P y está generado por los vectores $\vec{r}_u(u, v)$, $\vec{r}_v(u, v)$.

La ecuación cartesiana del plano tangente a S en P es

$$\det(\overrightarrow{PX},\ \vec{r}_u(u, v),\ \vec{r}_v(u, v)) = 0.$$

Definición. La *recta normal* a la superficie en P es la recta ortogonal al plano tangente a S en P.

El vector director de la recta normal en P es:

$$\vec{r}_u(u, v) \wedge \vec{r}_v(u, v).$$

Definición. Llamamos *vector normal unitario* a la superficie S en el punto P al vector:

$$\vec{N}(u, v) = \frac{\vec{r}_u(u, v) \wedge \vec{r}_v(u, v)}{\|\vec{r}_u(u, v) \wedge \vec{r}_v(u, v)\|}.$$

Nótese que la ecuación cartesiana del plano tangente a S en el punto P de coordenadas (a, b, c) con $\vec{N}(u, v) = (N_1, N_2, N_3)$ es

$$N_1(x - a) + N_2(y - b) + N_3(z - c) = 0.$$

Si la superficie S viene dada por una ecuación implícita $F(x, y, z) = 0$, con $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, sabemos que el vector gradiente de F es ortogonal a las superficies de nivel de F; esto es,

$$\nabla F(x, y, z) \cdot F(x, y, z) = 0.$$

Por tanto, el vector ∇F es un vector ortogonal al plano tangente de la superficie. Por tanto, en este caso, la ecuación del plano tangente en P se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla F(a, b, c) \cdot \overrightarrow{PX} \\ &= \nabla F(a, b, c) \cdot (x - a, y - b, z - c) \\ &= F_x(a, b, c)\,(x - a) + F_y(a, b, c)\,(y - b) + F_z(a, b, c)\,(z - c)\,. \end{aligned}$$

Ejemplo. Vamos a hallar la ecuación del plano tangente de la superficie con ecuación implícita $z = x^2 - y^2$ en el punto $(-1, 1, 0)$.

El vector gradiente de $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ es: $\nabla F(x, y, z) = (-2x, 2y, z)$. Por tanto, la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 - y^2$ en el punto $(-1, 1, 0)$ es:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla F(-1, 1, 0) \cdot (x + 1, y - 1, z) \\ &= (2, 2, 1) \cdot (x + 1, y - 1, z) \\ &= 2(x + 1) + 2(y - 1) + z. \end{aligned}$$

2.2 Primera forma fundamental

Definición. Llamamos *primera forma fundamental* de S en P a la forma bilineal simétrica definida positiva I_P asociada al producto escalar inducido en el plano tangente a S en P por el producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

2.2.1 Cálculo de la expresión analítica de la primera forma fundamental

Cualquier vector $\vec{w} \in T_P S$ se escribe de la siguiente manera:

$$\vec{w} = h(u, v)\ \vec{r}_u(u, v) + k(u, v)\ \vec{r}_v(u, v),$$

siendo $h, k \in C^\infty(D)$. Por simplicidad, escribiremos: $\vec{w} = h\ \vec{r}_u + k\ \vec{r}_v$.

Tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 &= (h_1\vec{r}_u + k_1\vec{r}_v) \cdot (h_2\vec{r}_u + k_2\vec{r}_v) \\ &= h_1h_2\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u + (h_1k_2 + h_2k_1)\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v + k_1k_2\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v \\ &= (h_1, k_1)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_2 \\ k_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} E &= \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 > 0, \\ F &= \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 > 0. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} I_P \colon T_P S \times T_P S &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ I_P(\vec{w}_1, \vec{w}_2) &= (h_1, k_1)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_2 \\ k_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

siendo (h_1, k_1) (resp. (h_2, k_2)) las coordenadas de $\vec{w}_1$ (resp. $\vec{w}_2$) en la base $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ de T_PS. Nótese que I_P es definida positiva pues teniendo en cuenta las expresiones de los vectores $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ y haciendo algunos cálculos se obtiene:

$$\begin{aligned}\text{traza}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= E + G > 0, \\ \det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= EG - F^2 = \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\|^2 > 0.\end{aligned}$$

2.2.2 Aplicaciones

1. *Cálculo de la longitud de una curva contenida en la superficie.*

   Vamos a calcular la distancia entre dos puntos $P = \vec{r}(u_0, v_0)$ y $Q = \vec{r}(u_1, v_1)$ de la superficie. Consideramos una curva en la superficie S con parametrización

   $$\vec{\gamma}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)),\ y(u(t), v(t)),\ z(u(t), v(t)))$$

   tal que en t_0 estemos en el punto P y en t_1 estemos en el punto Q, esto es,

   $$\begin{aligned} P &= \vec{\gamma}(t_0) = \vec{r}(u(t_0), v(t_0)), \\ Q &= \vec{\gamma}(t_1) = \vec{r}(u(t_1), v(t_1)). \end{aligned}$$

   Llamamos L la longitud de curva entre los puntos P y Q. Se tiene:

   $$L = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{\gamma}\,'(t)\|\, dt.$$

   Como:

   $$\begin{aligned} \|\vec{\gamma}\,'(t)\|^2 &= (\vec{r}_u u'(t) + \vec{r}_v v'(t)) \cdot (\vec{r}_u u'(t) + \vec{r}_v v'(t)) \\ &= (u'(t))^2\, \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u + 2u'(t)v'(t)\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v + (v'(t))^2\, \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v \\ &= E\,(u'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t) + G\,(v'(t))^2 \\ &= I_{\vec{r}(t)}(\vec{\gamma}\,'(t), \vec{\gamma}\,'(t)), \end{aligned}$$

   se tiene:

   $$L = \int_{t_0}^{t_1} \left(I_{\vec{\gamma}(t)}(\vec{\gamma}\,'(t), \vec{\gamma}\,'(t))\right)^{1/2} dt.$$

2. *Cálculo del ángulo que forman en P dos curvas C_1 y C_2 contenidas en la superficie.*

   Sea $\vec{w}_1$ el vector tangente a C_1 en P y sea $\vec{w}_2$ el vector tangente a C_2 en P. El ángulo θ que forman las dos curvas C_1, C_2 es el ángulo que forman sus respectivos vectores tangentes en P. Por tanto,

$$\cos\theta = \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2}{\|\vec{w}_1\| \, \|\vec{w}_2\|} = \frac{I_P(\vec{w}_1, \vec{w}_2)}{I_P(\vec{w}_1, \vec{w}_1)^{1/2} I_P(\vec{w}_2, \vec{w}_2)^{1/2}}.$$

   Las curvas C_1 y C_2 son ortogonales si $\theta = \pi/2$; esto es, si $I_P(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = 0$.

   Si C_1 y C_2 son las curvas coordenadas; esto es, $\vec{w}_1 = (1,0)$ y $\vec{w}_2 = (0,1)$, entonces,

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

   Por tanto, las curvas coordenadas son ortogonales si y sólo si $F = 0$.

3. *Cálculo del área de una región Σ de la superficie.*

   Consideramos la región Σ de la superficie limitada por las curvas coordenadas

$$\vec{r}(u_0, v), \ \vec{r}(u_0 + \Delta u, v), \ \vec{r}(u, v_0), \ \vec{r}(u, v_0 + \Delta v).$$

   El incremento de área A de la región Σ viene dada por el producto de las longitudes de sus lados por el seno del ángulo que forman, esto es,

$$\begin{aligned} \Delta A &= \|\vec{r}_u(u_0, v_0)\| \, \|\vec{r}_v(u_0, v_0)\| \sin\alpha \Delta u \Delta v \\ &= \|\vec{r}_u(u_0, v_0) \wedge \vec{r}_v(u_0, v_0)\| \, \Delta u \Delta v \\ &= \sqrt{EG - F^2} \Delta u \Delta v. \end{aligned}$$

   Por tanto, el área de la región Σ puede calcularse mediante la siguiente integral:

$$A = \int \int_{\Sigma} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Ejemplos

1. *Esfera.* Consideramos la siguiente parametrización de la esfera de radio 1 y centro el origen de coordenadas:

$$\vec{r}(\alpha,\beta) = (\cos\alpha\cos\beta,\ \cos\alpha\sin\beta,\ \sin\alpha)\,, \qquad (\alpha,\beta) \in (-\pi/2,\pi/2)\times[0,2\pi).$$

Se pide:

(a) Expresión de la primera forma fundamental.
Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{r}_\alpha(\alpha,\beta) &= (-\sin\alpha\cos\beta,\ -\sin\alpha\sin\beta,\ \cos\alpha)\,,\\ \vec{r}_\beta(\alpha,\beta) &= (-\cos\alpha\sin\beta,\ \cos\alpha\cos\beta,\ 0)\,. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} E(\alpha,\beta) &= \vec{r}_\alpha(\alpha,\beta)\cdot\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta) = \sin^2\alpha\left(\cos^2\beta+\sin^2\beta\right)+\cos^2\alpha = 1,\\ F(\alpha,\beta) &= \vec{r}_\alpha(\alpha,\beta)\cdot\vec{r}_\beta(\alpha,\beta) = \sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\alpha\cos\beta\cos\beta = 0,\\ G(\alpha,\beta) &= \vec{r}_\beta(\alpha,\beta)\cdot\vec{r}_\beta(\alpha,\beta) = \cos^2\alpha\left(\sin^2\beta+\cos^2\beta\right) = \cos^2\alpha. \end{aligned}$$

La matriz asociada a la primera forma fundamental en un punto arbitario $P = \vec{r}(\alpha,\beta)$ de la superficie es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

Como $F = 0$ las curvas coordenadas $\vec{r}(\alpha_0,\beta)$ (paralelo) y $\vec{r}(\alpha,\beta_0)$ (meridiano) son ortogonales entre si.

(b) La longitud de la curva parámetro $\beta = \beta_0$.
La curva parámetro $\beta = \beta_0$ (meridiano $\beta = \beta_0$) tiene la siguiente parametrización:

$$\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\alpha,\beta_0) = (\cos\alpha\cos\beta_0,\ \cos\alpha\sin\beta_0,\ \sin\alpha)\,, \qquad \alpha \in [0,2\pi).$$

Se tiene:

$$\vec{r}\,'(\alpha) = \vec{r}_u(\alpha,\beta_0) = 1\cdot\vec{r}_u(\alpha,\beta_0) + 0\cdot\vec{r}_\beta(\alpha,\beta_0),$$

por tanto $(1,0)$ son las coordenadas del vector tangente $\vec{r}\,'(\alpha)$ en la base $\{\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta_0),\vec{r}_\beta(\alpha,\beta_0)\}$ y

$$I_{\vec{r}(\alpha)}(\vec{r}\,'(\alpha),\vec{r}\,'(\alpha)) = (1,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Por tanto,

$$L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1dt = \pi.$$

(c) La longitud de la curva parámetro $\alpha = \alpha_0$.

La curva parámetro $\alpha = \alpha_0$ (paralelo $\alpha = \alpha_0$) tiene la siguiente parametrización:

$$\vec{r}(\beta) = \vec{r}(\alpha_0,\beta) = (\cos\alpha_0\cos\beta,\ \ \cos\alpha_0\sin\beta,\ \ \sin\alpha_0)\,,\qquad \alpha\in[-\pi/2,\pi/2].$$

Se tiene:

$$\vec{r}\,'(\beta) = \vec{r}_\beta(\alpha_0,\beta) = 0\cdot\vec{r}_\alpha(\alpha_0,\beta) + 1\cdot\vec{r}_\beta(\alpha_0,\beta),$$

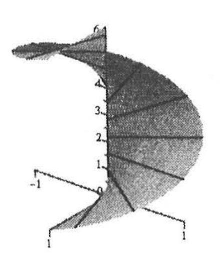
por tanto $(0,1)$ son las coordenadas del vector tangente $\vec{r}\,'(\beta)$ en la base $\{\vec{r}_\alpha(\alpha_0,\beta),\vec{r}_\beta(u_0,\beta)\}$ y

$$I_{\vec{r}(\beta)}(\vec{r}\,'(\beta),\vec{r}\,'(\beta)) = (0,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \cos^2\alpha_0.$$

Por tanto,

$$L = \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha_0 dt = 2\pi\cos^2\alpha_0.$$

2. Se considera la superficie formada por las rectas que se apoyan en la hélice de ecuación $\vec{\alpha}(u) = (\cos u,\ \sin u,\ u)$, $u\geq 0$, paralelas al plano $z=0$ y que se apoyan en el eje OZ. Véase la siguiente gráfica:



Superficie helicoidal

(a) Vamos a hallar una parametrización de dicha superficie.

Un punto X de la superficie satisface la siguiente ecuación:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP'} + \lambda \overrightarrow{P'P}$$

donde P' es el punto del eje OZ y P, P' están en la recta que se apoya en la hélice y en el eje OZ y que es paralela al plano $z = 0$. Por tanto si P es el punto de la hélice con coordenadas $(\cos u, \ \sin u, \ u)$, las coordenadas de P' son $(0, 0, u)$. se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{r}(u, \lambda) &= (0, 0, u) + \lambda (\cos u, \ \sin u, \ 0) \\ &= (\lambda \cos u, \ \lambda \sin u, \ u), \text{ con } u \geq 0 \text{ y } \lambda \in [0, 1]. \end{aligned}$$

(b) Veamos que $\vec{r}(u, \lambda)$ es una parametrización regular. Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{r}_u(u, \lambda) &= (-\lambda \sin u, \ \lambda \cos u, \ 1), \\ \vec{r}_\lambda(u, \lambda) &= (\cos u, \ \sin u, \ 0), \\ \vec{r}_u(u, \lambda) \wedge \vec{r}_\lambda(u, \lambda) &= (-\sin u, \ \cos u, \ -\lambda), \\ \|\vec{r}_u(u, \lambda) \wedge \vec{r}_\lambda(u, \lambda)\| &= \sqrt{1 + \lambda^2} \neq 0, \end{aligned}$$

por tanto, la parametrización es regular.

(c) Primera forma fundamental. Se tiene:

$$\begin{aligned} E(u, \lambda) &= \vec{r}_u(u, \lambda) \cdot \vec{r}_u(u, \lambda) = (-\lambda \sin u, \ \lambda \cos u, \ 1) \cdot (-\lambda \sin u, \ \lambda \cos u, \ 1) \\ &= 1 + \lambda, \\ F(u, \lambda) &= \vec{r}_u(u, \lambda) \cdot \vec{r}_\lambda(u, \lambda) = (-\lambda \sin u, \ \lambda \cos u, \ 1) \cdot (\cos u, \ \sin u, \ 0) \\ &= 0, \\ G(u, \lambda) &= \vec{r}_\lambda(u, \lambda) \cdot \vec{r}_\lambda(u, \lambda) = (-\lambda \sin u, \ \lambda \cos u, \ 1) \cdot (\cos u, \ \sin u, \ 0) \\ &= -\lambda. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} I_P \colon T_PS \times T_PS &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ I_P(\vec{w}_1, \vec{w}_2) &= (a_1, b_1) \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con $\vec{w}_1 = (a_1, b_1)$ y $\vec{w}_2 = (a_2, b_2)$.

2.3 Segunda forma fundamental

En el estudio de curvas, la curvatura medía la tasa de variación de la recta tangente en el entorno de un punto de la curva. Extendemos esta idea al estudio de superficies. Vamos a medir la distancia entre la superficie y el plano tangente a la superficie en un punto $P \in S$, en puntos de la superficie próximos al punto P. Para ello vamos a estudiar cómo varía el campo normal unitario $\vec{N}$ en un entorno del punto P.

Sea una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ con representación paramétrica regular

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))\,, \text{ con } (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,$$

de clase mayor o igual a 3. El campo normal unitario $\vec{N}$ asigna a cada punto P de la superficie, con $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(u,v)$, su vector normal unitario; esto es,

$$\vec{N} \colon D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{N}(u,v) = \frac{\vec{r}_u(u,v) \wedge \vec{r}_v(u,v)}{\|\vec{r}_u(u,v) \wedge \vec{r}_v(u,v)\|}.$$

Usaremos la notación $\vec{N}(u,v)$, $\vec{N}_P$ indistintamente. Y denotaremos $D\vec{N}_P(\vec{w})$ a la derivada direccional de la aplicación $\vec{N}$ en el punto P y en la dirección del vector unitario $\vec{w}$ tangente a la superficie en el punto P.

Derivando la identidad $\vec{N}_P \cdot \vec{N}_P = 1$ en la dirección de un vector unitario $\vec{w}$ tangente a la superficie en el punto P, obtenemos:

$$0 = 2D\vec{N}_P(\vec{w}) \cdot \vec{N}_P, \quad \text{con } \vec{w} \in T_PS,\ \|\vec{w}\| = 1.$$

De donde se concluye que el vector $D\vec{N}_P(\vec{w})$ es ortogonal al vector normal $\vec{N}_P$, luego,

$$D\vec{N}_P(\vec{w}) \in T_PS;$$

esto es, $\operatorname{Im} D\vec{N}_P = T_PS$.

Definición. Llamamos *segunda forma fundamental* de S en P a la forma cuadrática II_P definida en T_PS de la siguiente manera:

$$II_P \colon T_PS \longrightarrow \mathbb{R}, \quad II_P(\vec{w}) = -D\vec{N}_P(\vec{w}) \cdot \vec{w}.$$

Vamos a calcular la expresión analítica de la segunda forma fundamental en la base $\{\vec{r}_u(u,v), \vec{r}_v(u,v)\}$ de T_PS. Cualquier vector $\vec{w} \in T_PS$ se escribe de la siguiente manera:

$$\vec{w} = h(u,v)\ \vec{r}_u(u,v) + k(u,v)\ \vec{r}_v(u,v),$$

y

$$
\begin{aligned}
D\vec{N}_P(\vec{w}) &= \nabla \vec{N}_P \cdot \vec{w} \\
&= \left(\vec{N}_u(u,v), \vec{N}_v(u,v)\right) \cdot (h(u,v), k(u,v)) \\
&= h(u,v)\vec{N}_u(u,v) + k(u,v)\vec{N}_v(u,v).
\end{aligned}
$$

Por simplicidad, escribiremos: $\vec{w} = h\ \vec{r}_u + k\ \vec{r}_v$ y $D\vec{N}_P(\vec{w}) = h\ \vec{N}_u + k\ \vec{N}_v$. Tenemos:

$$
\begin{aligned}
II_P(\vec{w}) &= -D\vec{N}_P(\vec{w}) \cdot \vec{w} \\
&= -\left(h\ \vec{N}_u + k\ \vec{N}_v\right) \cdot (h\ \vec{r}_u + k\ \vec{r}_v) \\
&= -h^2\vec{N}_u \cdot \vec{r}_u - hk\left(\vec{N}_u \cdot \vec{r}_v + \vec{N}_v \cdot \vec{r}_u\right) - k^2\vec{N}_v \cdot \vec{r}_v \\
&= Lh^2 + 2Mhk + Nk^2,
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
L &= -\vec{r}_u \cdot \vec{N}_u = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{N}, \\
2M &= -\left(\vec{r}_u \cdot \vec{N}_v + \vec{r}_v \cdot \vec{N}_u\right) = 2\vec{r}_{uv} \cdot \vec{N}, \\
N &= -\vec{r}_v \cdot \vec{N}_v = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{N}.
\end{aligned}
$$

Las fórmulas anteriores se obtienen teniendo en cuenta: $\vec{r}_u \cdot \vec{N} = 0$ y $\vec{r}_v \cdot \vec{N} = 0$, pues $\vec{r}_u, \vec{r}_v \in T_PS$. Por tanto, derivando estas igualdades tenemos:

$$
\left.\begin{aligned}
0 = \tfrac{\partial}{\partial u}\left(\vec{r}_u \cdot \vec{N}\right) &= \vec{r}_{uu} \cdot \vec{N} + \vec{r}_u \cdot \vec{N}_u \\
0 = \tfrac{\partial}{\partial v}\left(\vec{r}_u \cdot \vec{N}\right) &= \vec{r}_{uv} \cdot \vec{N} + \vec{r}_u \cdot \vec{N}_v \\
0 = \tfrac{\partial}{\partial u}\left(\vec{r}_v \cdot \vec{N}\right) &= \vec{r}_{vu} \cdot \vec{N} + \vec{r}_v \cdot \vec{N}_u \\
0 = \tfrac{\partial}{\partial v}\left(\vec{r}_v \cdot \vec{N}\right) &= \vec{r}_{vv} \cdot \vec{N} + \vec{r}_v \cdot \vec{N}_v
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow
\begin{aligned}
&-\vec{r}_u \cdot \vec{N}_u = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{N}, \\
&-\left(\vec{r}_u \cdot \vec{N}_v + \vec{r}_v \cdot \vec{N}_u\right) = 2\vec{r}_{uv} \cdot \vec{N}, \\
&-\vec{r}_v \cdot \vec{N}_v = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{N}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo Hallar la segunda forma fundamental del toro con parametrización:

$$
\begin{gathered}
\vec{r}\colon [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\
\vec{r}(\alpha, \beta) = ((\cos\alpha + 2)\cos\beta,\ \ (\cos\alpha + 2)\sin\beta,\ \ \sin\alpha)\,.
\end{gathered}
$$

Solución. Se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta) &= (-\sin\alpha\cos\beta,\ -\sin\alpha\sin\beta,\ \cos\alpha)\,,\\ \vec{r}_\beta(\alpha,\beta) &= (-(\cos\alpha+2)\sin\beta,\ (\cos\alpha+2)\cos\beta,\ 0)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta)\wedge\vec{r}_\beta(\alpha,\beta)\\ =\ &(-\cos\alpha\,(\cos\alpha+2)\cos\beta,\ -\cos\alpha\,(\cos\alpha+2)\sin\beta,\ -\sin\alpha\,(\cos\alpha+2))\,,\end{aligned}$$

$$\|\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta)\wedge\vec{r}_\beta(\alpha,\beta)\| = \cos\alpha+2,$$

luego

$$\vec{N}(\alpha,\beta) = \frac{\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta)\wedge\vec{r}_\beta(\alpha,\beta)}{\|\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta)\wedge\vec{r}_\beta(\alpha,\beta)\|} = (-\cos\alpha\cos\beta,\ -\cos\alpha\sin\beta,\ -\sin\alpha)\,.$$

Y

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) &= (-\cos\alpha\cos\beta,\ -\cos\alpha\sin\beta,\ -\sin\alpha)\,,\\ \vec{r}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) &= (\sin\alpha\sin\beta,\ -\sin\alpha\cos\beta,\ 0)\,,\\ \vec{r}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) &= (-(\cos\alpha+2)\cos\beta,\ -(\cos\alpha+2)\sin\beta,\ 0)\,,\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}L(\alpha,\beta) &= \vec{r}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\cdot\vec{N}(\alpha,\beta) = 1,\\ M(\alpha,\beta) &= \vec{r}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\cdot\vec{N}(\alpha,\beta) = 0,\\ N(\alpha,\beta) &= \vec{r}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\cdot\vec{N}(\alpha,\beta) = \cos\alpha\,(\cos\alpha+2)\,.\end{aligned}$$

Luego,

$$II_P\,(h,k) = h^2 + \cos\alpha\,(\cos\alpha+2)\,k^2.$$

2.4 Curvatura normal

Sea S una superficie con parametrización $\vec{r}(u,v)$ y sea C una curva contenida en la superficie con parametrización natural:

$$\vec{\gamma}(s) = \vec{r}(u\,(s)\,,v\,(s)),\ \text{con}\ s\in I\subseteq\mathbb{R},$$

y sea P un punto arbitrario de la curva; esto es, $\overrightarrow{OP} = \vec{\gamma}(s)$.

Se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{t}(s) &= \vec{\gamma}\,'(s), \\ \vec{k}(s) &= \vec{t}\,'(s) = k(s)\vec{n}(s), \text{ vector curvatura de } C \text{ en } P.\end{aligned}$$

Descomponemos el vector curvatura de la siguiente manera:

$$\vec{k}(s) = \vec{k}_N(s) + \vec{k}_g(s) \text{ donde } \left\{ \begin{array}{l} \vec{k}_N(s) = \left(\vec{k}(s) \cdot \vec{N}_P\right) \vec{N}_P, \\ \vec{k}_g(s) = \vec{k}(s) - \vec{k}_N(s). \end{array} \right.$$

Llamamos *vector curvatura normal* a la proyección del vector curvatura sobre el vector curvatura normal de la superficie $\vec{N}_P$; esto es,

$$\vec{k}_N(s) = \left(\vec{k}(s) \cdot \vec{N}_P\right) \vec{N}_P.$$

Se denomina *curvatura normal en un punto* P de la superficie en la dirección de la curva C con parametrización $\vec{r}(s)$ a:

$$k_N(s) = \vec{k}(s) \cdot \vec{N}_P = \vec{t}\,'(s) \cdot \vec{N}_P.$$

Y llamamos *vector curvatura tangencial o geodésica* al vector $\vec{k}_g(s)$. Derivando la identidad $\vec{t}(s) \cdot \vec{N}_P = 0$ obtenemos:

$$0 = \vec{t}\,'(s) \cdot \vec{N}_P + \vec{t}(s) \cdot \frac{d\vec{N}_P}{ds} = k_N(s) + \vec{t}(s) \cdot \frac{d\vec{N}_P}{ds},$$

donde $d\vec{N}_P/ds$ es la derivada del campo $\vec{N}$ en el punto P en la dirección del vector $\vec{r}\,'(s)$; esto es,

$$\frac{d\vec{N}_P}{ds} = D\vec{N}_P(\vec{\gamma}\,'(s))$$

con

$$\vec{\gamma}\,'(s) = \vec{r}_u(u\,(s)\,, v\,(s))u'(s) + \vec{r}_v(u\,(s)\,, v\,(s))v'(s).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} k_N(s) &= -\frac{d\vec{N}_P}{ds} \cdot \vec{t}(s) \\ &= -D\vec{N}_P(\vec{\gamma}\,'(s)) \cdot \vec{\gamma}\,'(s) = II_P\left(\vec{\gamma}\,'(s)\right). \end{aligned}$$

Si

$$\vec{\phi}(t)=\vec{r}(u\,(t)\,,v\,(t)),\text{ con } t\in J\subseteq\mathbb{R},$$

es una parametrización arbitraria de la curva C, entonces, el vector $\vec{\gamma}\,'(t)$ no es unitario y se verifica la siguiente igualdad:

$$k_N(t)=\frac{II_P\left(\vec{\phi}\,'(t)\right)}{I_P\left(\vec{\phi}\,'(t),\vec{\phi}\,'(t)\right)}.$$

Obsérvese que $k_N(t)$ sólo depende de la dirección del vector tangente a la curva en el punto P. Se tiene el siguiente resultado:

2.4.1 Teorema de Meusnier

Todas las curvas sobre la superficie que tienen la misma recta tangente en el punto P, tienen la misma curvatura normal en P.

Se puede hablar de curvatura normal a una superficie en un punto P en la dirección de un vector $\vec{w}\in T_PS$; esto es,

$$k_N\,(\vec{w})=\frac{II_P\,(\vec{w})}{I_P\,(\vec{w},\vec{w})}.$$

Nota. Si las coordenadas del vector $\vec{w}\in T_PS$ en la base $\{\vec{r}_u(u,v),\vec{r}_v(u,v)\}$ de T_PS son $(h(u,v),k(u,v))$ entonces usaremos también la notación:

$$k_N\,(h,k)=\frac{II_P\,((h,k))}{I_P\,((h,k))},$$

donde $h=h(u,v)$, $k=k(u,v)$.

2.5 Naturaleza de los puntos de una superficie

Vamos a estudiar la posición de la superficie con respecto a su plano tangente. El vector $\vec{k}_N(u,v)=k_N(u,v)\vec{N}_P$ tiene la dirección del vector normal a la superficie en el punto P con $\overrightarrow{OP}=\vec{r}(u,v)$ y su sentido depende del signo de la curvatura normal. Teniendo en cuenta la primera forma fundamental es definida positiva, el signo de la curvatura normal depende únicamente de la segunda forma fundamental. La matriz de la segunda forma fundamental es:

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

y su determinante es: $\Delta = LN - M^2$. Se tiene:

$\Delta > 0$ Entonces II_P es definida (o positiva o negativa). Por lo tanto no hay ninguna dirección en la que k_N se anule (todos los autovalores de la matriz de II_P tienen el mismo signo). La curvatura normal tiene signo constante en un entorno del punto P. En un entorno de P la superficie está en uno de los semiespacios que determina el plano tangente a S en P. El punto P se dice que es un punto *elíptico*.

$\Delta = 0$ Y suponemos que L, M, N no se anulan simultáneamente. Por tanto, $\Delta = LN - M^2 = 0$ nos indica que la matriz de II_P tiene un autovalor $\lambda = 0$; esto es, existe una dirección a lo largo de la cual $k_N = 0$. En este caso el punto de contacto de la superficie con el plano tangente se dice que es un punto *parabólico*.

$\Delta < 0$ Entonces II_P es indefinida. Por lo tanto la matriz de II_P tiene un autovalor positivo y otro negativo; esto es, existe una dirección a lo largo de la cual $k_N > 0$ y otra a lo largo de la cual $k_N < 0$. El plano tangente a S en P interseca a la superficie en dos direcciones. El punto P se dice que es un punto *hiperbólico*.

Ejemplo Clasificar los puntos del toro con parametrización:

$$\vec{r}\colon [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$\vec{r}(\alpha, \beta) = ((\cos\alpha + 2)\cos\beta,\ \ (\cos\alpha + 2)\sin\beta,\ \ \sin\alpha)\,.$$

Solución. Teniendo en cuenta que la matriz de la segunda forma fundamental de S en un punto P, con $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(\alpha, \beta)$, es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha\,(\cos\alpha + 2) \end{pmatrix}$$

se tiene:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha\,(\cos\alpha + 2) \end{pmatrix} = \cos\alpha\,(\cos\alpha + 2)\,.$$

Como $\cos\alpha + 2 > 0$, el signo de Δ depende del signo de $\cos\alpha$.

Si $\alpha \in [0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi]$, entonces $\Delta > 0$ y los puntos son elípticos.

Si $\alpha \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$, entonces $\Delta = 0$ y los puntos son parabólicos.

Si $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$ entonces $\Delta < 0$ y los puntos son hiperbólicos.

2.6 Curvaturas de una superficie

De todas las direcciones del plano tangente a la superficie S en un punto P, es interesante determinar aquellas en las que la curvatura normal en el punto alcanza sus valores extremos.

2.6.1 Direcciones principales

Definición. Se llaman *direcciones principales de* S en P a las direcciones del plano tangente a S en P en las que la curvatura normal toma sus valores extremos. A las curvaturas coorespondientes las denominaremos *curvaturas principales.*

Vamos a hallar las direcciones principales de una superficie S en un punto P con curvatura normal:

$$k_N((h,k)) = \frac{II_P((h,k))}{I_P((h,k))} = \frac{Lh^2 + 2Mhk + Nk^2}{Eh^2 + 2Fhk + Gk^2}.$$

En las direcciones $\vec{v} = (h,k) \in T_PS$ principales se debe cumplir:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial k_N}{\partial h}(h,k) = \frac{2}{I_P((h,k))}\left((Lh + Mk) - k_N(Eh + Fk)\right), \\ 0 &= \frac{\partial k_N}{\partial k}(h,k) = \frac{2}{I_P((h,k))}\left((Mh + Nk) - k_N(Fh + Gk)\right). \end{aligned}$$

Por tanto las direcciones principales $(h,k) \in T_PS$ deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} (L - k_N E)\,h + (M - k_N F)\,k = 0, \\ (M - k_N F)\,h + (N - k_N G)\,k = 0. \end{array} \right. \qquad (1)$$

El sistema (1) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} Lh + Mk = k_N(Eh + Fk), \\ Mh + Nk = k_N(Fh + Gk). \end{array} \right.$$

Por tanto,

$$k_N = \frac{Lh + Mk}{Eh + Fk} = \frac{Mh + Nk}{Fh + Gk},$$

equivalentemente,

$$0 = (FN - GM)\,k^2 - (GL - NE)\,hk + (EM - FL)\,h^2$$

esto es,

$$0 = \begin{vmatrix} k^2 & -hk & h^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}$$

Tomando la dirección $(1, \lambda = h/k)$ tenemos:

$$0 = (FN - GM)\,\lambda^2 - (GL - NE)\,\lambda + (EM - FL)\,.$$

Si $FN - GM \neq 0$, las soluciones λ_1, λ_2 de esta ecuación de segundo grado en λ nos da las dos direcciones principales: $(1, \lambda_1)$, $(1, \lambda_2)$. Se demuestra que los vectores $(1, \lambda_1)$, $(1, \lambda_2)$ son ortogonales; esto es,

$$\begin{aligned} I_P\left((1, \lambda_1), (1, \lambda_2)\right) &= E + F\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) + G\lambda_1\lambda_2 \\ &= E + F\frac{GL - NE}{FN - GM} + G\frac{EM - FL}{FN - GM} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Definición. Un punto $P \in S$ se dice *umbilical* si las formas fundamentales en él son proporcionales; equivalentemente, si

$$k_N = \frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}.$$

En los puntos umbilicales todas las direcciones se pueden considerar principales. Un caso particular de punto umbilical es un punto *plano*, en el que se anula la segunda forma fundamental y, por tanto, $k_N = 0$ en cualquier dirección.

2.6.2 Curvaturas principales

Vamos a hallar las curvaturas principales de una superficie S en un punto P. Tomando la dirección $(1, \lambda)$ la ecuación

$$k_N\left(h, k\right) = \frac{Lh + Mk}{Eh + Fk} = \frac{Mh + Nk}{Fh + Gk},$$

se escribe:

$$k_N\left(1, \lambda\right) = \frac{L + M\lambda}{E + F\lambda} = \frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (L + M\lambda) - k_N\left(E + F\lambda\right) = 0 \\ (M + N\lambda) - k_N\left(F + G\lambda\right) = 0 \end{array} \right.$$

y eliminando λ en el sistema anterior obtenemos:

$$\left(EG - F^2\right) k_N^2 - (EN + GL - 2FM)\, k_N + LN - M^2 = 0$$

esto es,

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} k_N^2 - \left\{ \begin{vmatrix} E & M \\ F & N \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L & F \\ M & G \end{vmatrix} \right\} k_N + \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix} = 0$$

cuyas soluciones k_1, k_2 son las curvaturas principales.

El discriminante de la ecuación anterior es siempre mayor o igual que cero, y por tanto, las soluciones de dicha ecuación siempre son reales.

2.6.3 Curvatura de Gauss y curvatura media

Definición. Se denomina *curvatura de Gauss o total* de una superficie S en un punto $P \in S$ al producto de las curvaturas principales; esto es,

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Teniendo en cuenta $EG - F^2 > 0$ se deduce que el signo de la curvatura total depende del signo de $LN - M^2$. Se tiene:

1. Un punto P de la superficie es elíptico si y sólo si $K > 0$.
2. Un punto P de la superficie es parabólico si y sólo si $K = 0$.
3. Un punto P de la superficie es hiperbólico si y sólo si $K < 0$.

Definición. Se denomina *curvatura media* de una superficie S en un punto $P \in S$ a la media aritmética de las curvaturas principales; esto es,

$$k_m = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}.$$

Ejemplo Se considera la siguiente parametrización del toro:

$$\vec{r}\colon [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$\vec{r}(\alpha, \beta) = \left((\cos\alpha + 2)\cos\beta,\ (\cos\alpha + 2)\sin\beta,\ \sin\alpha\right).$$

Se pide:

1. Curvatura normal en el punto P de coordenadas $(2, 0, 1)$.

2. Direcciones principales en el punto P.

3. Curvaturas principales en el punto P.

4. Curvatura de Gauss en el punto P.

5. Curvatura media en el punto P.

Solución.

El punto P se alcanza para los valores de los parámetros $\alpha = \pi/2$ y $\beta = 0$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) &= (-\sin\alpha\cos\beta,\ -\sin\alpha\sin\beta,\ \cos\alpha)\,, \\ \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) &= (-(\cos\alpha + 2)\sin\beta,\ (\cos\alpha + 2)\cos\beta,\ 0)\,, \end{aligned}$$

y

$$\vec{N}(\alpha, \beta) = \frac{\vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \wedge \vec{r}_\beta(\alpha, \beta)}{\|\vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \wedge \vec{r}_\beta(\alpha, \beta)\|} = (-\cos\alpha\cos\beta,\ \ -\cos\alpha\sin\beta,\ \ -\sin\alpha)\,.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} E(\alpha, \beta) &= \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \cdot \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) = 1, \\ F(\alpha, \beta) &= \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \cdot \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) = 0, \\ G(\alpha, \beta) &= \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) \cdot \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) = (\cos\alpha + 2)^2\,, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &= \vec{r}_{\alpha\alpha}(\alpha, \beta) \cdot \vec{N}(\alpha, \beta) = 1, \\ M(\alpha, \beta) &= \vec{r}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) \cdot \vec{N}(\alpha, \beta) = 0, \\ N(\alpha, \beta) &= \vec{r}_{\beta\beta}(\alpha, \beta) \cdot \vec{N}(\alpha, \beta) = \cos\alpha\,(\cos\alpha + 2)\,. \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz de la primera forma fundamental de S en un punto P es:

$$\begin{pmatrix} E\,(\pi/2, 0) & F\,(\pi/2, 0) \\ F\,(\pi/2, 0) & G\,(\pi/2, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y la matriz de la segunda forma fundamental de S en un punto P es:

$$\begin{pmatrix} L\,(\pi/2, 0) & M\,(\pi/2, 0) \\ M\,(\pi/2, 0) & N\,(\pi/2, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La curvatura normal en la dirección del vector $\vec{w} \in T_P S$ con coordenadas (h,k) es:

$$k_N(h,k) = \frac{II_P(h,k)}{I_P(h,k)} = \frac{h^2}{h^2+4k^2}.$$

Las direcciones principales $(1,\lambda)$ en P son las soluciones de la ecuación:

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4\lambda \Longrightarrow \lambda = 0.$$

Si tomamos el vector de coordenadas $(\lambda, 1)$, entonces la ecuación se escribe:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4\lambda \Longrightarrow \lambda = 0.$$

Por tanto, las direcciones principales son las de los vectores de coordenadas $(1,0)$ y $(0,1)$.

Las curvaturas principales son:

$$\begin{aligned} k_N(1,0) &= \frac{II_P(1,0)}{I_P(1,0)} = 1, \\ k_N(0,1) &= \frac{II_P(0,1)}{I_P(0,1)} = 0. \end{aligned}$$

Si consideramos la ecuación de las curvaturas principales:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} k_N^2 - \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \right\} k_N + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

obtenemos:

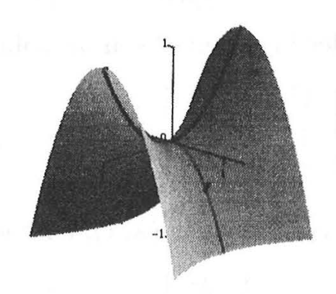
$$4(k_N - 1) k_N = 0 \Longrightarrow \begin{cases} k_N = 1 \\ k_N = 0 \end{cases}$$

La curvatura de Gauss es el producto de las curvaturas principales: $k_1 k_2 = 0$ y la curvatura media es $(k_1 + k_2)/2 = 1/2$.

2.7 Líneas de curvatura y líneas asintóticas

Definición. Una curva C contenida en una superficie S se denomina *línea de curvatura* si la dirección del vector tangente en cada uno de sus puntos coincide con la dirección principal en ese punto.

Véase el siguiente gráfico en el que se muestran las líneas de curvatura en el punto $(0,0,0)$ de la superficie con ecuación $z = x^2 - y^2$:



Líneas de curvatura

Sea S una superficie con parametrización $\vec{r}(u,v)$ y sea C una curva contenida en la superficie con parametrización:

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)), \text{ con } t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

y sea P un punto arbitrario de la curva; esto es, $\overrightarrow{OP} = \vec{\gamma}(t)$. La curva C es una línea de curvatura si las coordenadas $(u'(t), v'(t))$ del vector $\vec{\gamma}\,'(t)$ en la base $\{\vec{r}_u(u(t), v(t)), \vec{r}_v(u(t), v(t))\}$ de T_PS son solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$0 = (FN - GM)(v'(t))^2 - (GL - NE)\,u'(t)\,v'(t) + (EM - FL)(u'(t))^2$$

esto es,

$$0 = \begin{vmatrix} (v'(t))^2 & -u'(t)\,v'(t) & (u'(t))^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}$$

Definición. Una dirección se denomina *asintótica* respecto a un punto P de S si se anula en ella la segunda forma fundamental en P; esto es, la dirección del vector $\vec{w} = (h,k)$ es asintótica si

$$II_P(h,k) = 0.$$

Definición. Una curva C contenida en una superficie S se denomina *línea asintótica* si la dirección del vector tangente en cada uno de sus puntos coincide con una dirección asintótica.

La curva C es una línea asintótica si las coordenadas $(u'(t), v'(t))$ del vector $\vec{\gamma}\,'(t)$ en la base $\{\vec{r}_u(u(t), v(t)), \vec{r}_v(u(t), v(t))\}$ de T_PS son solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$0 = L\,(u'(t))^2 + 2Mu'(t)v'(t) + N\,(v'(t))^2 .$$

Ejemplo Se considera la superficie con parametrización:

$$\vec{r}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(u,v) = \left(u,\ v,\ u^2 - v^2\right).$$

Se pide:

1. Clasificar los puntos de la superficie.
2. Curvatura normal y curvaturas principales en el punto P de coordenadas $(0,0,0)$.
3. Líneas de curvatura en el punto P.
4. Líneas asintóticas en el punto P.

Solución. Tenemos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_u(u,v) &= (1,\ 0,\ 2u)\,,\\
\vec{r}_v(u,v) &= (0,\ 1,\ -2v)\,,\\
\vec{N}(u,v) &= \frac{\vec{r}_u(u,v)\wedge\vec{r}_u(u,v)}{\|\vec{r}_u(u,v)\wedge\vec{r}_u(u,v)\|} = \frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}(-2u,\ 2v,\ 1)\\
\vec{r}_{uu}(u,v) &= (0,\ 0,\ 2)\,,\\
\vec{r}_{uv}(u,v) &= (0,\ 0,\ 0)\,,\\
\vec{r}_{vv}(u,v) &= (0,\ 0,\ -2)\,.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
E(u,v) &= \vec{r}_u(u,v)\cdot\vec{r}_u(u,v) = 1+4u^2,\\
F(u,v) &= \vec{r}_u(u,v)\cdot\vec{r}_v(u,v) = -4uv,\\
G(u,v) &= \vec{r}_v(u,v)\cdot\vec{r}_v(u,v) = 1+4v^2,\\
L(u,v) &= \vec{r}_{uu}(u,v)\cdot\vec{N}(u,v) = \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}},\\
M(u,v) &= \vec{r}_{uv}(u,v)\cdot\vec{N}(u,v) = 0,\\
N(u,v) &= \vec{r}_{vv}(u,v)\cdot\vec{N}(u,v) = \frac{-2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}.
\end{aligned}$$

La matriz de la segunda forma fundamental en un punto arbitrario P de la superficie es:

$$\begin{pmatrix} 1+4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix}.$$

La matriz de la segunda forma fundamental en un punto arbitrario P de la superficie es:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \end{pmatrix}.$$

El determinante $L(u,v)N(u,v) - M(u,v)^2 < 0$, por tanto, todos los puntos de la superficie son puntos hiperbólicos.

La curvatura normal en el punto $P = \vec{r}(0,0)$ en la dirección de un vector (h,k) es:

$$k_N(h,k) = \frac{2h^2 - 2k^2}{h^2 + k^2}$$

Si suponemos $(h,k) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ tenemos:

$$k_N(\cos\alpha, \sin\alpha) = 2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = 2\cos 2\alpha.$$

Por tanto, k_N toma el valor máximo 2 para $\alpha = 0, \pi$, en la dirección de los vectores $(1,0)$ y $(-1,0)$, y k_N toma el valor mínimo -2 para $\alpha = \pi/2, 3\pi/2$, en la dirección de los vectores $(0,1)$ y $(0,-1)$.

Para $\alpha \in (-\pi/4, \pi/4) \cup (3\pi/4, 5\pi/4)$, la curvatura normal es positiva.

Para $\alpha \in (\pi/4, 3\pi/4) \cup (5\pi/4, 7\pi/4)$, la curvatura normal es negativa.

Para $\alpha = \pi/4, 3\pi/4$, la curvatura normal es cero. Por tanto, las direcciones asintóticas son:

$$\begin{aligned} (\cos\pi/4, \sin\pi/4) &= (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), \\ (\cos 3\pi/4, \sin 3\pi/4) &= (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2). \end{aligned}$$

La ecuación diferencial de las líneas de curvatura en P es:

$$0 = \begin{vmatrix} (v'(t))^2 & -u'(t)v'(t) & (u'(t))^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4u'(t)v'(t)$$

Esto es, $u'(t) = 0$ ó $v'(t) = 0$. Por tanto, las líneas de curvatura son $u(t) = u_0$ ó $v(t) = v_0$, con u_0 y v_0 constantes. Como estamos en el punto $P = \vec{r}(0,0)$,

tenemos $u(0) = 0$ y $v(0) = 0$, por tanto, las líneas de curvatura son:

$$\begin{aligned} \vec{r}(0,v) &= \left(0,\ v,\ -v^2\right), \\ \vec{r}(u,0) &= \left(u,\ 0,\ u^2\right). \end{aligned}$$

La ecuación diferencial de las líneas asintóticas en P es:

$$0 = 2\left(u'(t)\right)^2 - 2\left(v'(t)\right)^2 \Longrightarrow 0 = u'(t) + v'(t) \text{ ó } 0 = u'(t) - v'(t)$$

Integrando obtenemos: $u(t) = \pm v(t) + k$. Como $u(0) = v(0) = 0$, se tiene: $u = \pm v$. Las líneas asintóticas son:

$$\begin{aligned} \vec{r}(u,u) &= (u,\ u,\ 0) \\ \vec{r}(u,-u) &= (u,\ -u,\ 0) \end{aligned}$$

2.8 Indicatriz de Dupin

Vamos a estudiar la curvatura normal de una superficie en un punto P de la superficie. Supongamos que en un entorno del punto P tenemos una parametrización de Monge de la superficie de la forma:

$$\vec{r}(u,v) = (u, v, f(u,v)),$$

con $f_u(u,v) = f_v(u,v) = 0$. En este caso se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{r}_u(u,v) &= (1,0,0), \\ \vec{r}_v(u,v) &= (0,1,0), \\ \vec{N}(u,v) &= (0,0,1). \end{aligned}$$

Estamos suponiendo que la superficie está situada de manera que el punto P sea el origen de coordenadas y el plano tangente a la superficie en el punto P sea el plano $z = 0$. Se tiene: $E = 1,$, $F = 0$, $G = 0$ y

$$k_N(h,k) = \frac{Lh^2 + 2Mhk + Nk^2}{h^2 + k^2}.$$

Tomamos $h^2 + k^2 = 1$ (la curvatura normal sobre un vector unitario); esto es, $h = \cos\theta$, $k = \sin\theta$, entonces:

$$k_N(\theta) = L\cos^2\theta + 2M\cos\theta\sin\theta + N\sin^2\theta.$$

Tomamos $|k_N(\theta)| = 1/r^2$ $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, entonces:

$$\pm 1 = Lx_1^2 + 2Mx_1x_2 + Nx_2^2.$$

La ecuación anterior determina una sección cónica en el plano tangente que se denomina *Indicatriz de Dupin.*

Si P es elíptico $(LN - M^2 > 0)$, la indicatriz es una elipse.
Si P es hiperbólico $(LN - M^2 < 0)$, la indicatriz consiste en un par de hipérbolas conjugadas. A lo largo de una de las hipérbolas $k_N > 0$ y a lo largo de la otra $k_N < 0$. Las asíntotas de las hipérbolas corresponden a las direcciones en las que $k_N = 0$.
Si P es parabólico $(LN - M^2 = 0,\ L^2 + M^2 + N^2 \neq 0)$, la indicatriz es un par de rectas paralelas.

Si la indicatriz existe y no es una circunferencia, entonces k_N toma sus valores extremos en dos direcciones ortogonales que son las direcciones de los ejes de la indicatriz.

En los puntos elípticos en los que $k_N =$ constante $\neq 0$, todas las direcciones se dicen principales. En los puntos planos $k_N = 0$, también todas las direcciones son principales.

Ejemplo 1 Vamos a calcular la curvatura normal de la esfera de radio r y centrada en el origen; esto es, la esfera de ecuación cartesiana:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Podemos considerar la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} \vec{r}\colon [0, 2\pi) \times (0, \pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \vec{r}(\alpha, \beta) &= (a\cos\alpha\sin\beta,\ a\sin\alpha\sin\beta,\ a\cos\beta)\,. \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) &= (-a\sin\alpha\sin\beta,\ a\cos\alpha\sin\beta,\ 0)\,, \\ \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) &= (a\cos\alpha\cos\beta,\ a\sin\alpha\cos\beta,\ -a\sin\beta)\,, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \wedge \vec{r}_\beta(\alpha, \beta) &= \left(-a^2\cos\alpha\sin^2\beta,\ -a^2\sin\alpha\sin^2\beta,\ -a^2\sin\beta\cos\beta\right), \\ \|\vec{r}_\alpha(\alpha, \beta) \wedge \vec{r}_\beta(\alpha, \beta)\|^2 &= a^4\cos^2\alpha\sin^4\beta + a^4\sin^2\alpha\sin^4\beta + a^4\sin^2\beta\cos^2\beta \\ &= a^4\sin^4\beta\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + a^4\sin^2\beta\cos^2\beta \\ &= a^4\sin^4\beta + a^4\sin^2\beta\cos^2\beta \\ &= a^4\sin^2\beta\left(\sin^2\beta + \cos^2\beta\right) = a^4\sin^2\beta, \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\vec{N}(\alpha,\beta) = \frac{\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta) \wedge \vec{r}_\beta(\alpha,\beta)}{\|\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta) \wedge \vec{r}_\beta(\alpha,\beta)\|} = (-\cos\alpha\sin\beta,\ -\sin\alpha\sin\beta,\ -\cos\beta).$$

Y

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) &= (-a\cos\alpha\sin\beta,\ -a\sin\alpha\sin\beta,\ 0),\\
\vec{r}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) &= (-a\sin\alpha\cos\beta,\ a\cos\alpha\cos\beta,\ 0),\\
\vec{r}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) &= (-a\cos\alpha\sin\beta,\ -a\sin\alpha\sin\beta,\ -a\cos\beta),
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
E(\alpha,\beta) &= \vec{r}_\alpha(\alpha,\beta)\cdot\vec{r}_\alpha(\alpha,\beta) = a^2\sin^2\alpha\sin^2\beta + a^2\cos^2\alpha\sin^2\beta\\
&= a^2\sin^2\beta,\\
F(\alpha,\beta) &= \vec{r}_\alpha(\alpha,\beta)\cdot\vec{r}_\beta(\alpha,\beta) = 0,\\
G(\alpha,\beta) &= \vec{r}_\beta(\alpha,\beta)\cdot\vec{r}_\beta(\alpha,\beta) = a^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + a^2\sin^2\alpha\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta\\
&= a^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(\alpha,\beta) &= \vec{r}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\cdot\vec{N}(\alpha,\beta) = a\cos^2\alpha\sin^2\beta + a\sin^2\alpha\sin^2\beta = a\sin^2\beta,\\
M(\alpha,\beta) &= \vec{r}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\cdot\vec{N}(\alpha,\beta) = 0,\\
N(\alpha,\beta) &= \vec{r}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\cdot\vec{N}(\alpha,\beta) = a\cos^2\alpha\sin^2\beta + a\sin^2\alpha\sin^2\beta + a\cos^2\beta\\
&= a\sin^2\beta + a\cos^2\beta = a.
\end{aligned}$$

Por tanto,

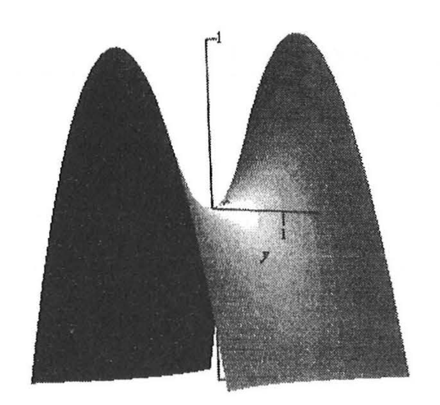
$$k_N((h,k)) = \frac{Lh^2+2Mhk+Nk^2}{Eh^2+2Fhk+Gk^2} = \frac{a\sin^2\beta h^2 + ak^2}{a^2\sin^2\beta h^2 + a^2k^2} = \frac{1}{a}.$$

Luego la curvatura normal es constante en cada punto de la superficie y en cada dirección del plano tangente. La indicatriz de Dupin en cada punto de la esfera es:

$$a^2 = x^2 + y^2.$$

Ejemplo 2 Vamos a hallar la indicatriz de Dupin de la superficie con ecuación cartesiana $z = x^2 - y^2$ en el punto P de coordenadas $(0,0,0)$.

La superficie es:



Paraboloide hiperbólico

Una parametrización de dicha superficie es:

$$\vec{r}(u,v) = \left(u,\ v,\ u^2 - v^2\right)$$

que es una parametrización de Monge con $f(u,v) = u^2 - v^2$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
E(u,v) &= \vec{r}_u(u,v)\cdot\vec{r}_u(u,v) = 1 + 4u^2,\\
F(u,v) &= \vec{r}_u(u,v)\cdot\vec{r}_v(u,v) = -4uv,\\
G(u,v) &= \vec{r}_v(u,v)\cdot\vec{r}_v(u,v) = 1 + 4v^2,\\
L(u,v) &= \vec{r}_{uu}(u,v)\cdot\vec{N}(u,v) = \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}},\\
M(u,v) &= \vec{r}_{uv}(u,v)\cdot\vec{N}(u,v) = 0,\\
N(u,v) &= \vec{r}_{vv}(u,v)\cdot\vec{N}(u,v) = \frac{-2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}.
\end{aligned}$$

En el punto P tenemos

$$\begin{aligned}
E(0,0) &= 1, \quad F(0,0) = 0, \quad G(0,0) = 1,\\
L(0,0) &= 2, \quad M(0,0) = 0, \quad N(0,0) = -2.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$k_N(\theta) = \frac{2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta.$$

Tomando $|k_N(\theta)| = 1/r^2$ y $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$ entonces la ecuación anterior se escribe:

$$\pm 1 = 2x^2 - 2y^2.$$

Luego la indicatriz de Dupin es el par de hipérbolas de ecuaciones $1 = 2x^2 - 2y^2$ y $-1 = 2x^2 - 2y^2$. El valor máximo de la curvatura es $k_1 = 2$ y se alcanza en la dirección $(\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$ y el valor mínimo de la curvatura es $k_2 = -2$ y se alcanza en la dirección $(\cos\pi/2, \sin\pi/2) = (0, 1)$. Las direcciones asintóticas de la superficie en el punto P son las direcciones de las asíntotas de la indicatriz de Dupin; esto es, las direcciones de las rectas de ecuaciones $x = y$ y $x = -y$. Las líneas asintóticas de la superficie en el punto P son:

$$\begin{aligned} \vec{r}(u, u) &= (u,\ u,\ 0), \\ \vec{r}(u, -u) &= (u,\ -u,\ 0). \end{aligned}$$

2.9 Fórmula de Euler

Vamos a expresar la curvatura normal en una dirección que forme un ángulo α con respecto a una de las direcciones principales en función de ese ángulo α y de las curvaturas principales.

Consideramos una representación paramétrica regular en las que las líneas de curvatura sean las líneas paramétricas; esto es, $\vec{r}(u_0, v)$ y $\vec{r}(u, v_0)$ son las líneas de curvatura en el punto $\vec{r}(u_0, v_0)$. Por tanto, las direcciones $(1, 0)$, $(0, 1)$ son las direcciones principales. Y las curvaturas principales son:

$$k_1 = \frac{II_P((1,0))}{I_P((1,0))} = \frac{L}{E}, \quad k_1 = \frac{II_P((0,1))}{II_P((0,1))} = \frac{N}{G}.$$

El coeficiente $F = 0$ es cero pues las líneas de curvatura son ortogonales. La ecuación de las direcciones principales es:

$$0 = \begin{vmatrix} (v'(t))^2 & -u'(t)v'(t) & (u'(t))^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}.$$

Como $(1, 0)$ es una dirección principal y $F = 0$, se tiene:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ E & 0 & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = EM$$

y como $(0,1)$ es una dirección principal y $F=0$, se tiene:

$$0=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E & 0 & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = -GM$$

Como $GE \neq 0$ pues la primera forma fundamental es definida positiva, entonces de las dos ecuaciones anteriores se deduce: $M=0$. Por tanto, la curvatura normal en la dirección de un vector (h,k) es:

$$\begin{aligned} k_N(h,k) &= \frac{II_P((h,k))}{I_P((h,k))} = \frac{Lh^2+Nk^2}{Eh^2+Gk^2} \\ &= \frac{L}{E}\frac{Eh^2}{Eh^2+Gk^2} + \frac{N}{G}\frac{Gk^2}{Eh^2+Gk^2} \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que el ángulo α que forma el el vector (h,k) y el vector $(1,0)$ satisface:

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha &= \frac{I_P((h,k),(1,0))}{I_P((h,k))\,I_P((1,0))} = \frac{Eh^2}{Eh^2+Gk^2}, \\ \sin^2\alpha &= 1-\cos^2\alpha = \frac{Gk^2}{Eh^2+Gk^2}, \end{aligned}$$

se deduce:

$$k_N(h,k) = k_1\cos^2\alpha + k_2\sin^2\alpha$$

que es la *fórmula de Euler.*

3 Superficies regladas

Definición. Una superficie S se dice *reglada* si por cada punto $P \in S$ existe una recta contenida en la superficie y que contiene al punto P.

Toda superficie reglada S puede venir determinada por una curva C y un vector $\vec{w}_P$ asociado a cada punto P de la curva. La superficie está formada por las rectas r_P, con $P \in C$, que contienen al punto P y tienen vector director $\vec{w}_P$. Por tanto, un punto X de la superficie satisface:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{w}_P \text{ con } P \in C,\ t \in \mathbb{R}.$$

Si consideramos una parametrización $\vec{\gamma}(u)$, $u \in I$, de la curva C, un punto arbitrario X de la recta que contiene al punto $P \in C$ con $\overrightarrow{OP} = \vec{\gamma}(u_0)$ y tiene la dirección del vector $\vec{w}_P$ se escribe de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{OX} = \vec{\gamma}(u_0) + t\vec{w}_P, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, una parametrización de la superficie es la siguiente:

$$\vec{r}(u,t) = \vec{\gamma}(u) + t\vec{w}(u), \quad (u,t) \in I \times \mathbb{R}.$$

Para cada $u_0 \in I$ obtenemos una recta con parametrización:

$$\vec{r}(u_0,t) = \vec{\gamma}(u_0) + t\vec{w}(u_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

A dicha recta la llamamos *generatriz* de la superficie reglada.

Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ obtenemos una curva con parametrización:

$$\vec{r}(u,t_0) = \vec{\gamma}(u) + t_0\vec{w}(u), \quad u \in I.$$

A dicha curva la llamamos *directriz* de la superficie reglada.

Ejemplo Vamos a obtener una representación paramétrica regular de la superficie formada por las rectas que se apoyan en la elipse de ecuaciones cartesianas: $4x^2 + 2y^2 = 3$, $z = 0$ y que son paralelas a la recta de ecuaciones $x + y + z = 1$ y $x - 2y = 0$.

Una parametrización de la elipse es:

$$\vec{\gamma}(s) = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos s,\ \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin s,\ 0\right), \quad s \in [0, 2\pi).$$

La recta de ecuaciones $x+y+z = 1$ y $x-2y = 0$ tiene la dirección del vector $\vec{w} = (2,1,-3)$. Por tanto, una parametrización de dicha superficie es:

$$\begin{aligned}\vec{r}(s,t) &= \vec{\gamma}(s) + t\vec{w} \\ &= \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos s,\ \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin s,\ 0\right) + t\,(2,1,-3) \\ &= \left(2t + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos s,\ t + \tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin s,\ -3t\right), \quad (s,t) \in [0,2\pi) \times \mathbb{R}.\end{aligned}$$

La ecuación implícita de la superficie es:

$$4(x + \tfrac{2}{3}z)^2 + (y + \tfrac{1}{3}z)^2 = 3.$$

Definición. Una superficie reglada S se dice *desarrollable*, si el plano tangente a la superficie en cada punto de una generatriz es el mismo. En caso contrario se dice que la superficie S no es desarrollable.

Definición. Una superficie reglada S se dice que es *cónica* si todas sus generatrices contienen a un mismo punto Q al que se denomina *vértice* de la superficie.

Una parametrización de una superficie cónica con vértice Q es:

$$\vec{r}(u,t) = \overrightarrow{OQ} + t\left(\vec{\gamma}(u) - \overrightarrow{OQ}\right), \quad (u,t) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,$$

siendo $\vec{\gamma}(u)$ una parametrización de una curva C contenida en la superficie. Las generatrices de dicha superficie tienen la dirección del vector $\vec{w}(u) = \vec{\gamma}(u) - \overrightarrow{OQ}$. Se tiene: $\vec{w}\,'(u) = \vec{\gamma}\,'(u)$.

Definición. Una superficie reglada S se dice que es *cilíndrica* si el vector asociado a cada punto P de la superficie es proporcional a un vector fijo $\vec{w}$.

Una parametrización de una superficie cilíndrica es:

$$\vec{r}(u,t) = \vec{\gamma}(u) + t\vec{w}, \quad (u,t) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

siendo $\vec{\gamma}(u)$ una parametrización de una curva C contenida en la superficie. Se tiene: $\vec{w}\,' = \vec{0}$.

Definición. Una superficie reglada S se dice que es *desarrollable tangencial* si cada punto de la curva directriz C con representación paramétrica $\vec{\gamma}(u)$ tiene asociado el vector tangente a la curva en dicho punto.

Una parametrización de una superficie desarrollable tangencial es:

$$\vec{r}(u,t) = \vec{\gamma}(u) + t\vec{\gamma}\,'(u), \quad (u,t) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

siendo $\vec{\gamma}(u)$ una parametrización de la curva directriz C.

3.1 Curvatura total de las superficies regladas

Vamos a comprobar que la curvatura de Gauss o total de una superficie reglada es siempre menor o igual que cero.

Sea S una superficie reglada con parametrización:

$$\vec{r}(u,t) = \vec{\gamma}(u) + t\vec{w}(u), \quad (u,t) \in D.$$

Supongamos además que todos los puntos de la superficie son regulares; esto es, $\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t) \neq \vec{0}$, para todo $(u,t) \in D$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_u(u,t) &= \vec{\gamma}\,'(u) + t\vec{w}\,'(u), \\
\vec{r}_t(u,t) &= \vec{w}(u), \\
\vec{N}(u,t) &= \frac{1}{\|\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)\|}\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t) \\
&= \frac{1}{\|\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)\|}(\vec{\gamma}\,'(u) + t\vec{w}\,'(u)) \wedge \vec{w}(u), \\
\vec{r}_{uu}(u,t) &= \vec{\gamma}\,''(u) + t\vec{w}\,''(u), \\
\vec{r}_{ut}(u,t) &= \vec{w}\,'(u), \\
\vec{r}_{tt}(u,t) &= \vec{0}.
\end{aligned}$$

Por tanto, el determinante de la matriz de la segunda forma fundamental en un punto arbitrario P con $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(u,t)$ es:

$$\begin{vmatrix} \vec{r}_{uu}(u,t)\cdot\vec{N}(u,t) & \vec{r}_{ut}(u,t)\cdot\vec{N}(u,t) \\ \vec{r}_{ut}(u,t)\cdot\vec{N}(u,t) & \vec{0}\cdot\vec{N}(u,t) \end{vmatrix} = -\left(\vec{r}_{ut}(u,t)\cdot\vec{N}(u,t)\right)^2 \leq 0.$$

Teniendo en cuenta las expresiones de $\vec{r}_{ut}(u,t)$ y $\vec{N}(u,t)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{ut}(u,t)\cdot\vec{N}(u,t) &= \vec{w}\,'(u)\cdot\frac{1}{\|\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)\|}((\vec{\gamma}\,'(u) + t\vec{w}\,'(u)) \wedge \vec{w}(u)) \\
&= \frac{1}{\|\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)\|}[\vec{w}\,'(u),\ \vec{\gamma}\,'(u) + t\vec{w}\,'(u),\ \vec{w}(u)] \\
&= \frac{1}{\|\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)\|}[\vec{w}\,'(u),\ \vec{\gamma}\,'(u),\ \vec{w}(u)].
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{vmatrix} \vec{r}_{uu}(u,t)\cdot\vec{N}(u,t) & \vec{r}_{ut}(u,t)\cdot\vec{N}(u,t) \\ \vec{r}_{ut}(u,t)\cdot\vec{N}(u,t) & \vec{0}\cdot\vec{N}(u,t) \end{vmatrix} = -\frac{[\vec{\gamma}\,'(u),\ \vec{w}(u),\ \vec{w}\,'(u)]^2}{\|\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)\|^2}.$$

Teniendo en cuenta

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} E(u,t) & F(u,t) \\ F(u,t) & G(u,t) \end{pmatrix} &= \|\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)\|^2, \\
\det\begin{pmatrix} L(u,t) & M(u,t) \\ M(u,t) & N(u,t) \end{pmatrix} &= -\frac{[\vec{\gamma}\,'(u),\ \vec{w}(u),\ \vec{w}\,'(u)]^2}{\|\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)\|^2},
\end{aligned}$$

la curvatura total de una superficie reglada es:

$$K_T(u,t) = -\frac{[\vec{\gamma}\,'(u),\ \vec{w}(u),\ \vec{w}\,'(u)]^2}{\|\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)\|^4} \leq 0.$$

Por tanto, los puntos de las superficies regladas son hiperbólicos, parabólicos o planos.

Llamamos *parámetro de distribución* y lo denotamos $p(u)$ al valor del producto mixto:

$$p(u) = [\vec{\gamma}\,'(u),\ \vec{w}(u),\ \vec{w}\,'(u)]\,.$$

Si $p(u) = 0$ entonces $K_T(u,t) = 0$ y el punto P con $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(u,t)$ es un punto parabólico o plano. Una de las curvaturas principales es cero y por tanto, las líneas asintóticas son líneas de curvatura.

Si $p(u) \neq 0$ entonces $K_T(u,t) < 0$ y el punto P con $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(u,t)$ es un punto hiperbólico. Una de las curvaturas principales es negativa y la otra es positiva.

3.2 Clasificación de las superficies regladas

1. Si $p(u) = [\vec{\gamma}\,'(u),\ \vec{w}(u),\ \vec{w}\,'(u)] = 0$ para todo valor del parámetro u la superficie es *desarrollable.* Se tienen los siguientes casos:

   (a) Si $\vec{w}\,'(u) = \vec{0}$ entonces $\vec{w}(u) = \vec{w}$ es un vector constante y la superficie es una superficie *cilíndrica.* En este caso, se tiene:

   $$\begin{aligned} \vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t) &= (\vec{\gamma}\,'(u) + t\vec{w}\,'(u)) \wedge \vec{w}(u) \\ &= \vec{\gamma}\,'(u) \wedge \vec{w}. \end{aligned}$$

   Si $\vec{\gamma}\,'(u) \wedge \vec{w} \neq \vec{0}$ (esto es, los vectores $\vec{\gamma}\,'(u)$ y $\vec{w}$ no son paralelos) entonces el vector normal es

   $$\vec{N}(u,t) = \frac{\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)}{\|\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)\|} = \frac{\vec{\gamma}\,'(u) \wedge \vec{w}}{\|\vec{\gamma}\,'(u) \wedge \vec{w}\|}.$$

   Nótese que es constante a lo largo de cada generatriz ya que no depende del parámetro t.

(b) Si $\vec{\gamma}\,'(u) = \vec{0}$ entonces $\vec{\gamma}(u)$ es constante; esto es, consiste en un único punto. La superficie es una superficie *cónica.* En este caso, se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t) &= (\vec{\gamma}\,'(u) + t\vec{w}\,'(u)) \wedge \vec{w}(u) \\ &= t\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u).\end{aligned}$$

Si $\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u) \neq \vec{0}$ (esto es, los vectores $\vec{w}\,'(u)$ y $\vec{w}(u)$ no son paralelos) entonces el vector normal es

$$\vec{N}(u,t) = \frac{t\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)}{\|t\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)\|} = \frac{\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)}{\|\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)\|}.$$

Nótese que es constante a lo largo de cada generatriz ya que no depende del parámetro t.

(c) Si $\vec{w}\,'(u) \neq \vec{0}$, $\vec{\gamma}\,'(u) \neq \vec{0}$ entonces la condición $p(u) = [\vec{\gamma}\,'(u),\ \vec{w}(u),\ \vec{w}\,'(u)] = 0$ nos indica que los vectores $\vec{w}\,'(u)$, $\vec{\gamma}\,'(u)$ y $\vec{w}(u)$ son coplanarios. Se tiene:

$$\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t) = \vec{\gamma}\,'(u) \wedge \vec{w}(u) + t\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u).$$

Como $\vec{w}\,'(u)$, $\vec{\gamma}\,'(u)$ y $\vec{w}(u)$ son coplanarios los vectores $\vec{\gamma}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)$ y $\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)$ son paralelos y por tanto, $\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)$ es proporcional al vector $\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)$ que no depende del parámetro t. Luego, el plano tangente es el mismo en todos los puntos de la generatriz. Veremos más adelante que en este caso la superficie es una superficie desarrollable tangencial.

2. Si $p(u) \neq 0$ para todo valor del parámetro u la superficie es *no desarrollable* o *alabeada.*

3.3 Puntos singulares de una superficie reglada

Los puntos singulares de una superficie con parametrización $\vec{r}(u,t) = \vec{\gamma}(u) + t\vec{w}(u)$ son aquellos puntos P con $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(u,t)$, que verifican:

$$\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t) = (\vec{\gamma}\,'(u) + t\vec{w}\,'(u)) \wedge \vec{w}(u) = \vec{0}.$$

Vamos a hallar los valores del parámetro t para los cuales se cumple la condición anterior. Para ello, multiplicamos escalarmente la expresión anterior por $\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)$, suponiendo $\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u) \neq \vec{0}$. Se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)) \cdot (\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)) \\ &= ((\vec{\gamma}\,'(u) + t\vec{w}\,'(u)) \wedge \vec{w}(u)) \cdot (\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)) \\ &= (\vec{\gamma}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)) \cdot (\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)) + t\,\|\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)\|^2, \end{aligned}$$

de donde, se obtiene:

$$t = -\frac{(\vec{\gamma}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)) \cdot (\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u))}{\|\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)\|^2},$$

Por tanto, los puntos singulares de la superficie se encuentran en la curva con parametrización:

$$\vec{\beta}(u) = \vec{\gamma}(u) - \frac{(\vec{\gamma}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)) \cdot (\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u))}{\|\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)\|^2}\vec{w}(u),$$

que llamamos *línea de estricción.* Llamamos *puntos centrales* a los puntos regulares de la línea de estricción. Nótese que en la línea de estricción además de los puntos singulares se encuentran los puntos de la superficie tales que el vector $\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)$ es ortogonal al vector $\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)$.

3.3.1 Puntos centrales

Veamos que en una superficie reglada no desarrollable la curvatura de Gauss alcanza su valor máximo en los puntos centrales. Supongamos $p(u) \neq 0$, teniendo en cuenta la expresión de la curvatura de Gauss:

$$K_T(u,t) = -\frac{[\vec{\gamma}\,'(u),\ \vec{w}(u),\ \vec{w}\,'(u)]^2}{\|\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)\|^4} < 0,$$

se deduce que el valor absoluto de la curvatura de Gauss, $|K_T(u,t)|$, es máximo cuando el valor de

$$\|\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)\|^2$$

es mínimo. Llamamos $\vec{v}(u,t) = \vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t)$. Teniendo en cuenta la siguiente expresión:

$$\vec{r}_u(u,t) \wedge \vec{r}_t(u,t) = \vec{\gamma}\,'(u) \wedge \vec{w}(u) + t\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u),$$

se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\left\|\vec{r}_u(u,t)\wedge\vec{r}_t(u,t)\right\|^2 \\ &= \frac{d}{dt}\left(\vec{v}(u,t)\cdot\vec{v}(u,t)\right) = 2\frac{d}{dt}\vec{v}(u,t)\cdot\vec{v}(u,t) \\ &= 2\left(\vec{w}\,'(u)\wedge\vec{w}(u)\right)\cdot\left(\vec{\gamma}\,'(u)\wedge\vec{w}(u)+t\vec{w}\,'(u)\wedge\vec{w}(u)\right) \\ &= 2\left(\left(\vec{w}\,'(u)\wedge\vec{w}(u)\right)\cdot\left(\vec{\gamma}\,'(u)\wedge\vec{w}(u)\right)+t\left\|\vec{w}\,'(u)\wedge\vec{w}(u)\right\|^2\right). \end{aligned}$$

Por tanto, el valor máximo de $\|\vec{r}_u(u,t)\wedge\vec{r}_t(u,t)\|^2$ se alcanza para el siguiente valor de t:

$$t=-\frac{\left(\vec{w}\,'(u)\wedge\vec{w}(u)\right)\cdot\left(\vec{\gamma}\,'(u)\wedge\vec{w}(u)\right)}{\left\|\vec{w}\,'(u)\wedge\vec{w}(u)\right\|^2},$$

que coincide con el valor del parámetro t de los puntos centrales de la superficie. Por tanto, en los puntos centrales el valor absoluto de la curvatura de Gauss es máximo.

3.3.2 Arista de retroceso

Si la superficie es desarrollable entonces los vectores $\vec{\gamma}\,'(u)$, $\vec{w}(u)$, $\vec{w}\,'(u)$ son coplanarios y el vector $\vec{w}\,'(u)\wedge\vec{w}(u)$ no es ortogonal al vector $\vec{r}_u(u,t)\wedge\vec{r}_t(u,t)$. Por tanto, todos los puntos de la línea de estricción son puntos singulares y en este caso, a la curva con parametrización:

$$\vec{\beta}(u)=\vec{\gamma}(u)-\frac{\left(\vec{w}\,'(u)\wedge\vec{w}(u)\right)\cdot\left(\vec{\gamma}\,'(u)\wedge\vec{w}(u)\right)}{\left\|\vec{w}\,'(u)\wedge\vec{w}(u)\right\|^2}\vec{w}(u),$$

la llamaremos *arista de retroceso*. A lo largo de la arista de retroceso la superficie se desdobla en dos hojas.

Como $\vec{w}\,'(u)$, $\vec{\gamma}\,'(u)$ y $\vec{w}(u)$ son coplanarios, el vector $\vec{\gamma}\,'(u)$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $\vec{w}\,'(u)$ y $\vec{w}(u)$:

$$\vec{\gamma}\,'(u)=\lambda(u)\vec{w}(u)+\mu(u)\vec{w}\,'(u).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}\,'(u)\wedge\vec{w}(u) &= \left(\lambda(u)\vec{w}(u)+\mu(u)\vec{w}\,'(u)\right)\wedge\vec{w}(u) \\ &= \mu(u)\vec{w}\,'(u)\wedge\vec{w}(u). \end{aligned}$$

Multiplicando escalarmente la expresión anterior por el vector $\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)$ obtenemos:

$$(\vec{\gamma}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)) \cdot (\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)) = \mu(u) \left\| \vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u) \right\|^2,$$

de donde

$$\mu(u) = \frac{(\vec{\gamma}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)) \cdot (\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u))}{\left\| \vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u) \right\|^2},$$

y la arista de retroceso se puede parametrizar como sigue:

$$\vec{\beta}(u) = \vec{\gamma}(u) - \mu(u)\vec{w}(u).$$

Por tanto, $\vec{\gamma}(u) = \vec{\beta}(u) + \mu(u)\vec{w}(u)$ y podemos parametrizar la superficie en función de la arista de restroceso como sigue:

$$\begin{aligned} \vec{r}(u,t) &= \vec{\beta}(u) + \mu(u)\vec{w}(u) + t\vec{w}(u) \\ &= \vec{\beta}(u) + (\mu(u) + t)\,\vec{w}(u). \end{aligned}$$

Derivando $\vec{\beta}(u) = \vec{\gamma}(u) - \mu(u)\vec{w}(u)$ y teniendo en cuenta $\vec{\gamma}\,'(u) = \lambda(u)\vec{w}(u) + \mu(u)\vec{w}\,'(u)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{\beta}\,'(u) &= \vec{\gamma}\,'(u) - \mu'(u)\vec{w}(u) - \mu(u)\vec{w}\,'(u) \\ &= \lambda(u)\vec{w}(u) + \mu(u)\vec{w}\,'(u) - \mu'(u)\vec{w}(u) - \mu(u)\vec{w}\,'(u) \\ &= (\lambda(u) - \mu'(u))\,\vec{w}(u). \end{aligned}$$

Por tanto:

1. Si $\lambda(u) = \mu'(u)$ entonces $\vec{\beta}\,'(u) = \vec{0}$ y la superficie es una superficie cónica.

2. Si $\lambda(u) \neq \mu'(u)$, el vector $\vec{w}(u)$ es proporcional a $\vec{\beta}\,'(u)$ y a superficie es una superfice desarrollable tangencial y puede parametrizarse como sigue:

$$\vec{r}(u,t) = \vec{\beta}(u) + \frac{t}{\lambda(u) - \mu'(u)}\vec{\beta}\,'(u), \quad (u,t) \in I \times \mathbb{R},$$

en función de su arista de retroceso.

3.4 Ejemplos y ejercicios

Ejemplo 1 Dar una parametrización de la superficie engendrada por las rectas tangentes a la curva $\vec{\gamma}(u) = (e^u, e^{-u}, u)$.

El vector director de la recta generatriz que se apoya en el punto $\vec{\gamma}(u)$ de la curva directriz es:

$$\vec{\gamma}\,'(u) = (e^u, -e^{-u}, 1).$$

Por tanto, una parametrización de la superficie es:

$$\begin{aligned} \vec{r}(u,t) &= \vec{\gamma}(u) + t\vec{\gamma}\,'(u) \\ &= (e^u + te^u, e^{-u} - te^{-u}, u + t). \end{aligned}$$

Dicha superficie es una superficie desarrollable tangencial con arista de retroceso $\vec{\gamma}(u)$.

Ejemplo 2 Vamos a clasificar la superficie con parametrización:

$$\vec{r}(u,v) = \left(u + v\cos u,\ u^2 + v\sin u,\ u^3\right).$$

La parametrización anterior es lineal en el parámetro v. Por tanto, la podemos escribir como sigue:

$$\begin{aligned} \vec{r}(u,v) &= \left(u,\ u^2,\ u^3\right) + v\left(\cos u,\ \sin u,\ 0\right) \\ &= \vec{\gamma}(u) + v\vec{w}(u), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(u) &= \left(u,\ u^2,\ u^3\right), \\ \vec{w}(u) &= \left(\cos u,\ \sin u,\ 0\right). \end{aligned}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}\,'(u) &= \left(1,\ 2u,\ 3u^2\right), \\ \vec{w}\,'(u) &= \left(-\sin u,\ \cos u,\ 0\right). \end{aligned}$$

Por tanto, el parámetro de distribución es:

$$\begin{aligned} p(u) &= [\vec{\gamma}\,'(u),\ \vec{w}(u),\ \vec{w}\,'(u)] \\ &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2u & 3u^2 \\ \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3u^2 \neq 0 \text{ si } u \neq 0. \end{aligned}$$

La superficie es una superficie alabeada.

Los puntos singulares de la superficie son los que satisfacen la siguiente condición:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \vec{r}_u(u,v) \wedge \vec{r}_v(u,v) \\ &= \left(1 - v\sin u,\ 2u + v\cos u,\ 3u^2\right) \wedge (\cos u,\ \sin u,\ 0) \\ &= \left(-3u^2 \sin u,\ 3u^2\cos u,\ \sin u - 2u\cos u - v\right);\end{aligned}$$

esto es,

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = u^2 \sin u, \\ 0 = u^2\cos u, \\ 0 = \sin u - 2u\cos u - v, \end{array}\right. \quad \Longrightarrow u = 0 \text{ y } v = 0.$$

El único punto singular de la superficie es el punto

$$\vec{r}(0,0) = (0,\ 0,\ 0).$$

Los puntos centrales de la superficie se alcanzan en el siguiente valor del parámetro v:

$$v = -\frac{(\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)) \cdot (\vec{\gamma}\,'(u) \wedge \vec{w}(u))}{\|\vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u)\|^2}.$$

Teniendo en cuenta:

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}\,'(u) \wedge \vec{w}(u) &= \left(1,\ 2u,\ 3u^2\right) \wedge (\cos u,\ \sin u,\ 0) \\ &= (-3u^2 \sin u,\ 3u^2 \cos u,\ \sin u - 2u\cos u), \\ \vec{w}\,'(u) \wedge \vec{w}(u) &= (-\sin u,\ \cos u,\ 0) \wedge (\cos u,\ \sin u,\ 0) \\ &= (0, 0, -1),\end{aligned}$$

obtenemos:

$$v = \sin u - 2u\cos u,$$

y una paraetrización de la línea de estricción es:

$$\begin{aligned}\vec{\beta}(u) &= \vec{\gamma}(u) - (\sin u - 2u\cos u)\,\vec{w}(u) \\ &= \left(u,\ u^2,\ u^3\right) - (\sin u - 2u\cos u)(\cos u,\ \sin u,\ 0) \\ &= \left(u - (\sin u - 2u\cos u)\cos u,\ u^2 - (\sin u - 2u\cos u)\sin u,\ u^3\right).\end{aligned}$$

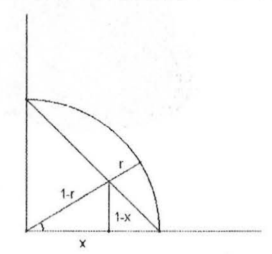
Dicha curva contiene al punto singular y a los puntos centrales.

Ejemplo 3 Obtener una parametrización de la superficie formada por segmentos que se apoyan en el arco de circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, del primer octante y el segmento de la recta $x + y = 1$, $z = 0$ del primer octante.

Primero vamos a obtener parametrizaciones del arco de circunferencia y del segmento respectivamente. El arco de circunferencia lo parametrizamos como sigue:

$$\begin{aligned} \phi_1\colon [0, \pi/2] &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \phi_1(\alpha) &= (\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0). \end{aligned}$$

Parametrizamos el segmento con el mismo parámetro con el que hemos parametrizado el arco de circunferencia. Teniendo en cuenta el siguiente dibujo:



obtenemos:

$$1 - r = \frac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha},$$

por tanto, podemos parametrizar el segmento como sigue:

$$\begin{aligned} \phi_2\colon [0, \pi/2] &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \phi_2(\alpha) &= \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha},\ 1 - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha},\ 4\right). \end{aligned}$$

Consideramos ahora el vector director de la recta que se apoya en el arco de circunferencia y en el segmento:

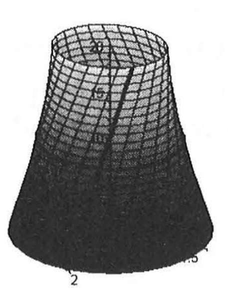
$$\begin{aligned} w(\alpha) &= \phi_2(\alpha) - \phi_1(\alpha) \\ &= \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} - \cos\alpha,\ 1 - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} - \sin\alpha,\ 4\right). \end{aligned}$$

Por tanto, una parametrización de la superficie considerada es:

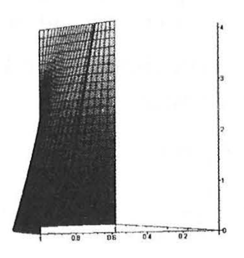
$$\begin{aligned} \vec{r}(\alpha, t) &= \phi_1(\alpha) + t w(\alpha) \\ &= (\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0) + t\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} - \cos\alpha,\ 1 - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} - \sin\alpha,\ 4\right), \end{aligned}$$

con $\alpha \in [0, \pi/2]$ y $t \in [0, 1]$.

Ejercicio 1 Parametrizar la superficie formada por rectas forman un ángulo de 45° con el eje OZ y que se apoyan en la elipse de ecuaciones $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, $z = 0$ y en la circunferencia contenida en el plano $z = 20$, de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Véase la siguiente figura:



Ejercicio 2 Parametrizar la superficie formada por rectas que se apoyan en el segmento de ecuación $x+y = 1$, contenido en el plano $z = 4$, y en el arco de circunferencia del primer cuadrante del plano $z = 0$, de la circunferencia centrada en el origen y de radio unidad Véase la siguiente figura:



4 Bibliografía

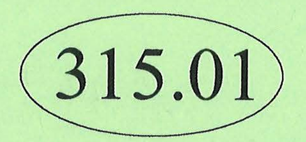
1. A. F. Costa, M. Gamboa, A. M. Porto, *Ejercicios de Geometría Diferencial de curvas y superficies,* Sanz y Torres, 1998.

2. Manfredo P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces,* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1976.

3. Dirk J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry,* Dover Publications, Inc., N.Y., 1961.

NOTAS

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

